1) Définition : Le plan est muni d'un R.O.N $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Soit A et M deux points distincts du plan et R un réel positif.

$$M \in \zeta_{(A,R)} \Leftrightarrow AM = R$$

2) Équation cartésienne :

Si $A(a,b)$ et $M(x,y)$ alors :

$$AM = R \Leftrightarrow AM^2 = R^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Exemple :

Si $A(-1,2)$ et $M(x,y)$ et $R = \sqrt{3}$ alors : $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3$

3) Détermination de l'équation cartésienne :

Soit $\mathrm{E} = \{M(x,y)/x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$ où a, b et c trois réels donnés.

Rappelons que : $x^2 + ax = x^2 + 2\frac{a}{2}x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Soit $M(x,y) \in \mathrm{E}$ alors :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

Posons $\mathrm{H} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$

Discussion :

1^er^ cas : H < 0 alors : $E = \emptyset$

2^éme^ cas : H $= 0$ alors : $E = \left\{ I\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \right\}$.

3^éme^ cas : H > 0 alors : $E = \left\{ \zeta_{\left(I\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), \sqrt{H}\right)} \right\}$

Exemples : Déterminer l'ensemble E dans chaque cas :

- ❖ $E = \{M(x, y) / x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0\}$
- ❖ $E = \{M(x, y) / x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0\}$
- ❖ $E = \{M(x, y) / x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0\}$

Solution :

❖ $E = \{M(x, y) / x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0\}$

On a : $\begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \\ c = 6 \end{cases}$ et $H = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 1 + 9 - 6 = 4 > 0$ parsuite

$E = \left\{ \zeta_{\left(I\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), \sqrt{H}\right)} \right\}$ où $I(-1,3)$ et $R = \sqrt{4} = 2$

❖ $E = \{M(x, y) / x^2 + y^2 - 2x + 4y + 20 = 0\}$

On a : $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \\ c = 20 \end{cases}$ et $H = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 1 + 4 - 20 = -15 < 0$ parsuite

$E = \emptyset$.

❖ $E = \{M(x, y) / x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0\}$

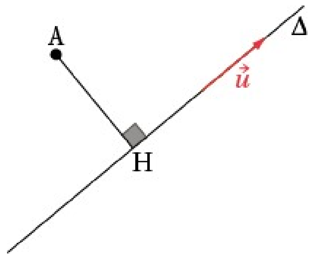
On a : $\begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$ et $H = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 4 + 1 - 5 = 0$ parsuite$E = \{I(-2,1)\}$.

4) Position relative d'une droite et d'un cercle :

a) Distance d'un point à une droite :

Soit Δ la droite d'équation :$ax + by + c = 0$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ son vecteur normal.

Etant donné un point $A(x_A, y_A)$ et H son projeté orthogonal sur Δ .



On définie la distance de A à la droite Δ le réel positif $d(A, \Delta) = AH$ ou bien :

$$d(A, \Delta) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemple : Si $\Delta: -x + 2y + 3 = 0$ et $A(3, -2)$ alors :

$$d(A, \Delta) = \frac{|-3 - 4 + 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Cas particulier : Si $A \in \Delta$ alors $d(A, \Delta) = 0$

Application : Déterminer $d\big(C, (AB)\big)$ où $(0,2)$, $B(-1, -2)$ et $C(-1, -1)$.

Puis en déduire S_{ABC}.

Solution :

- **Equation cartésienne de (AB):** le vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

  donc $\begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases}$ implique $\vec{n}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $(AB): -4x + y + c = 0$ et $A \in (AB)$

  donc $c = -2$ parsuite $(AB): -4x + y - 2 = 0$
- $d\big(C, (AB)\big) = \frac{|4-1-2|}{\sqrt{(-4)^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = CH$ où H le projeté orthogonal de C sur (AB)
- $S_{ABC} = \frac{CH.AB}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{17}} \times \sqrt{17}}{2} = \frac{1}{2}$

b) Position relative d’un cercle une droite :

Etant donné un cercle (ζ) de centre O et de rayon R et (d) la droite

d’équation :$ax + by + c = 0$.

Les trois positions relatives d’un cercle et une droite sont connues :

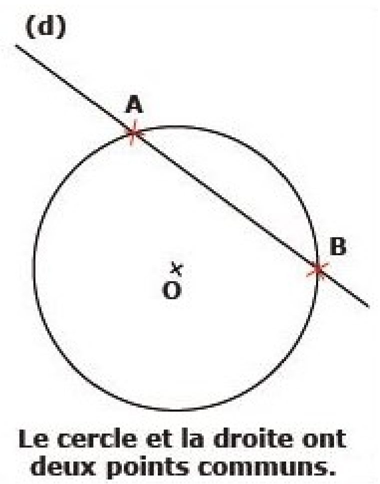
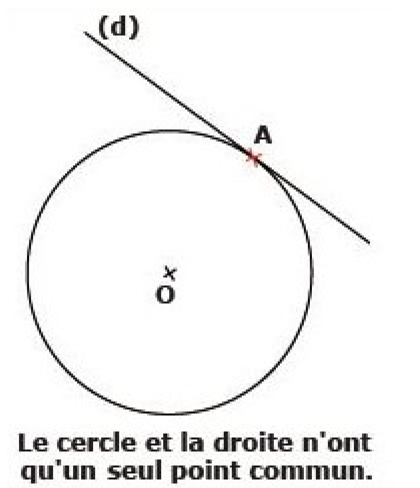
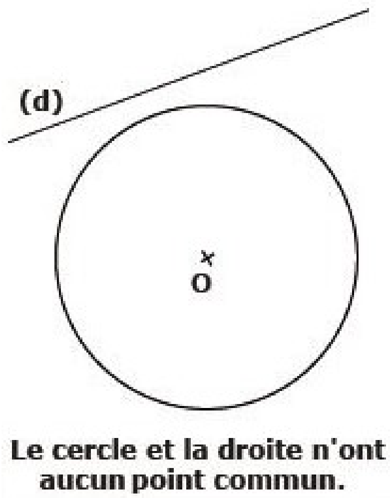
- L’intersection (se coupent en deux points).
- Tangent (se coupent en un seul point).
- Disjoints (ne se coupent pas).

1^{er} cas : $\mathrm{R} > d(o,(d))$ alors : $(\zeta) \cap (d) = \{A, B\}$

$2^{éme}$ cas : $\mathrm{R} = d(o,(d))$ alors : $(\zeta) \cap (d) = \{A\}$.

$3^{éme}$ cas : $\mathrm{R} < d(o,(d))$ alors : $(\zeta) \cap (d) = \emptyset$

Illustration :

1^{er} cas :	$2^{éme}$ cas :	$3^{éme}$ cas :
		
$(\zeta) \cap (d) = \{A, B\}$	$(\zeta) \cap (d) = \{A\}$	$(\zeta) \cap (d) = \emptyset$

Exercice Corrigé

Enoncé :

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

On note ($\mathscr{C}$) l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que : $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$

1- Justifier que ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre I(-1 ;0) et de rayon R=4.

2- soit Δ une droite d'équation cartésienne : $x-\sqrt{3}y-7=0$

3-a- calculer d(I ; Δ) . on déduire que la droite Δ est tangente au cercle ($\mathscr{C}$) .

b-déterminer les coordonnées du point de contact A de la droite Δ avec le cercle ($\mathscr{C}$)

4-a- vérifier que le point K(3 ;0) est un point du cercle ($\mathscr{C}$)

b-Déterminer une équation de la tangente T à ($\mathscr{C}$) au point K.

5- Déterminer une équation cartésienne du cercle ($\mathscr{C}$) image du cercle($\mathscr{C}$) par $t_{\vec{v}}$

Correction :

1- Soit $(C) = \{M(x,y)/x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0\}$.

On a $M \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$

On a : $\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -15 \end{cases}$ et H $= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 1 + 15 = 16 >$ par suite $(\zeta) = \left\{\zeta_{I((-1,0),4)}\right\}$

2- Soit $\Delta: x - \sqrt{3}y - 7 = 0$.

a- $d(I,\Delta) = \frac{|-1-7|}{\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{8}{2} = 4$. On a $d(I,\Delta) = R$ donc (ζ) et Δ sont tangents.

b- Soit $(\zeta) \cap \Delta = \{A\} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 16 \\ x - \sqrt{3}y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 16 \\ x = \sqrt{3}y + 7 \end{cases}$

On a : $(x+1)^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}y + 8\right)^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow 4y^2 + 16\sqrt{3}y + 48 = 0$

On a : $y^2 + 4\sqrt{3}y + 12 = 0 \Leftrightarrow \left(y + 2\sqrt{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -2\sqrt{3}$ par suite $x = 1$

D'où $A\left(1, -2\sqrt{3}\right)$

3-

a- Soit K(3,0)et (ζ): $(3+1)^2 + 0^2 = 16 + 0 = 16$ donc $K \in (\zeta)$.

b- Soit : $ax + by + c = 0$. on a : (ζ) et T sont tangents en K donc le vecteur

$\vec{n}_T = \overrightarrow{IK}\binom{4}{0}$ est normal à T d'où $T: 4x + c = 0$ or K ∈ T donc $12 + c = 0$ ce qui donne $= -12$. ainsi $T: x - 3 = 0$

c- On a $(\zeta'): (x - a')^2 + (y - b')^2 = R$ où $(\zeta') = t_{\vec{v}}(\zeta)$

- Les deux cercles ont le même rayon R=4
- Soit I' le centre de donc $I' = t_{\vec{v}}(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{II'} = \vec{v}$. posons $I'(a', b')$

$\overrightarrow{II'} = \vec{v} \Leftrightarrow \binom{a' + 1}{b'} = \binom{0}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = -1 \\ b' = 1 \end{cases}$ d'où $I'(-1,1)$

Ainsi $(\zeta'): (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$